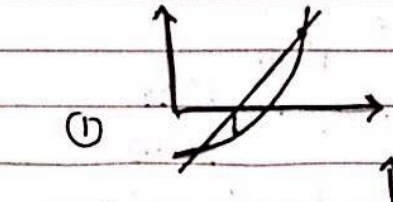
(1) الطرق التكرارية Iterative Methods

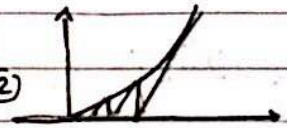
لإيجاد جذر المعادلة $f(x)=0$ بإحدى الطرق التكرارية، نبدأ بقيمة ابتدائية x_0 ثم نوجد تقريبات متتالية $\{x_n\}$ افضل.

الفكرة الأساسية في الطرق التالية هي ان نستبدل المنحني بخط مستقيم مناسب يسهل حساب نقطة تقاطعه مع المحور x، هذا المستقيم يمر بالنقطة (x_n, y_n) التي تمثل اخر تقريب تم حسابه، اما اتجاه المستقيم فيمكن اختياره بطرق مختلفة، فمثلاً يمكننا ان نحدد اتجاها ثابتا كأن يكون موازيا للقاطع الذي يمر بأول نقطتين (x_1, y_1)، (x_0, y_0)، او المماس الذي يمر بأول نقطة (x_0, y_0). كما يمكننا ان نختار اتجاها متغيرا كأن يتطابق المستقيم مع القاطع الذي يمر بالنقطتين (x_n, y_n)، (x_{n-1}, y_{n-1}) او المماس الذي يمر بأول نقطة (x_0, y_0). كما يمكننا ان نختار اتجاها متغيرا كأن يتطابق المستقيم مع القاطع الذي يمر بالنقطتين (x_n, y_n)، (x_{n-1}, y_{n-1}) او مع المماس الذي يمر بالنقطة (x_n, y_n)، فاذا رمزنا لميل الخط المستقيم بالرمز m، فيكون هناك عدة اختيارات كما يلي:

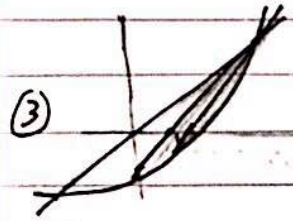
1- القاطع الثابت $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$



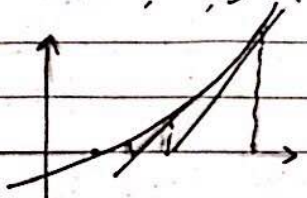
2- المماس الثابت $m = f'(x_0)$



3- القاطع المتغير الاتجاه: (طريقة الوضع الكاذب)



4- المماس المتغير الاتجاه: (طريقة نيوتن - رافسون)

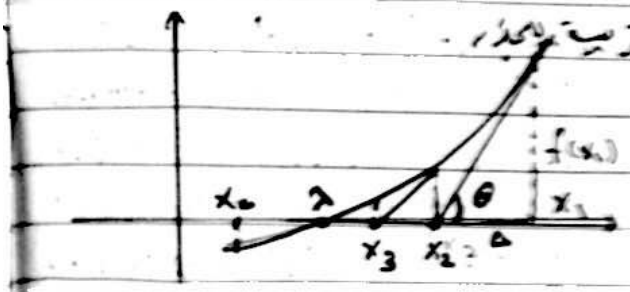


في اي من الحالات اعلاه، فاننا نحصل على صيغة تكرارية في الصورة التالية:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{m}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

طريقة نيوتن - رامسون (N-R)

تعرف هذه الطريقة باسم طريقة نيوتن لحل المعادلة $f(x)$ حيث
تتبع المعادلة x_0 بالصورة الصفرية $f(x)=0$ ونوجد قيمة تقريبية
أولية مثل x_0 بالقرب من الجذر المطلوب λ ، ثم نوجد التقريبات المتتالية
$\{x_n\}$ تعتمد هذه الطريقة على تحديد موقع الجذر في الفترة ولتكن (x_0, x_1)
ثم يرسم المماس للمنحنى في احدى النقاط ولتكن $(x_1, f(x_1))$ ويحدد لتقاطع المحور x
في النقطة ولتكن x_2 كما موضح في الشكل ثم يرسم المماس للمنحنى في النقطة الجديدة
$(x_2, f(x_2))$ ويحدد تقاطع المحور x في النقطة ولتكن x_3 وهكذا إلى ان نحصل على
قدر من التقريب x_n والذي يمثل الجذر التقريبي للجذر.



$$f'(x_0) = \tan\theta = \frac{f(x_0)}{\Delta}$$

$$\Delta = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$\Delta = x_1 - x_2 \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

وبشكل مشابه x_3 من الجذر x_2

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

تسمى هذه الصيغة بصيغة نيوتن - رامسون وهي أكثر الطرق استعمالاً
وشيوعاً وسرعتها في التقارب الى قيمة الجذر من الطرق الأخرى.

مثال: أوجد قيمة الجذر الموجب للمعادلة $x(x^3-1)=15$
بالتعويض $x=2$ بطريقة نيوتن - رامسون.

$x(x^3-1)=10 \Rightarrow x^4-x-10 \Rightarrow f(x)=0$

$f(x)=x^4-x-10=0$, $f(1)=-10$, $f(2)=4$

نلاحظ يتغير الاشارة في الفترة $(1,2)$ أن $f(1)f(2)<0$

$f'(x)=4x^3-1$

$x_0=2$, $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=2-\frac{4}{31}=1.87096$

$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=1.87096-\frac{f(1.87096)}{f'(1.87096)}=1.85578$

وبالمثل نحسب القيم، تقريباً $x_3=1.855585$; $x_4=1.8555845$

ولغرض التوقف - يجب ان يتحقق الشرط التالي $e<0.5\times10^{-4}$

$|x_4-x_3|=|0.000\,000\,005|<0.5\times10^{-4}$

الجذر $\lambda=1.8555845$

او بطريقة اخرى:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^4-x_n-10}{4x_n^3-1}$$

$$=\frac{3x_n^4+10}{4x_n^3-1} \quad , n=0,1,2,3,\cdots$$

$x_1=\frac{3x_0^4+10}{4x_0^3-1}$, $x_0=2$

$=1.87096$

$x_2=\frac{3x_1^4+10}{4x_1^3-1}=1.85578$

ونكرر العملية عدة مرات الى ان تتحقق الشرط المطلوب.

Ex:

H.W: حل

Find by Newton-Raphson the least root of the eqn. $e^{-x}=\sin x$ for three decimal places.

Ex: Find real root of an eqn.
$f(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20$, near to $x = 1$
for $n = 4$ only, by (N-R) method.

n	1	2	3	4
x_n	1.4117647	1.3693364	1.36880818	1.36880810

Ex: Find an iterative formulas to calculate each of the following:

(i) $\sqrt{a}$ (ii) $\sqrt[n]{a}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{a}}$

(i) $x = \sqrt{a} \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow f(x) = x^2 - a = 0$

$f'(x) = 2x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

Ex: Find the square root $\sqrt{30}$ rounded to five significant figures.

Soln:

Since $\sqrt{25} \le \sqrt{30} \le \sqrt{36}$, chose $x_0 = 5.5$

$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{30}{x_n}\right)$; $x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{30}{x_0}\right)$

$x_1 = \frac{1}{2}\left(5.5 + \frac{30}{5.5}\right) = 5.47727$

$x_2 = \frac{1}{2}\left(5.47727 + \frac{30}{5.47727}\right) = 5.47722$

ملاحظة: في الحالات التي تكون فيها الدالة f متعددة حدود فانه يمكن استخدام طريقة هورنر لحساب قيمة كل من $f(x_n)$ و $f'(x_n)$ وذلك للحصول على نتائج بسرعة أكبر.

طريقة هورنر: Horner's Method

تستخدم هذه الطريقة لإيجاد قيمة متعددة الحدود P او مشتقتها P' عند نقطة معينة، كما تستخدم لإزالة الجذور من المعادلات الجبرية وعندئذ تعرف باسم طريقة القسمة التركيبية Method of Synthetic division، وكما موضح في الخطوات التالية

لو كانت لدينا متعددة حدود من الدرجة الثالثة:

$$P_3(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \quad , \quad x = z_0$$

a_0	a_1	a_2	a_3	z_0
	a_0z_0	$(a_0z_0+a_1)z_0$	$[(a_0z_0+a_1)z_0+a_2]z_0$	
a_0	$a_0z_0+a_1$	$(a_0z_0+a_1)z_0+a_2$	$[(a_0z_0+a_1)z_0+a_2]z_0+a_3$	

او تكتب بشكل آخر

a_0	a_1	a_2	a_3	z_0
	b_0z_0	b_1z_0	b_2z_0	
b_0	b_1	b_2	b_3	$P(z_0)=b_3$

where $a_0 = b_0$, $b_1 = a_1 + a_0z_0$, ...

$$b_i = a_i + b_{i-1}z_0 \quad , \quad i = 1,2,3.$$

Convergence of N-R method تقارب طريقة (N-R):

نعني بالتقارب هنا تقارب القيم التقريبية المتتالية التي نحصل عليها بالصيغة التكرارية نحو القيمة المضبوطة للجذر.

نفرض ان λ هي القيمة المضبوطة للجذر، اي ان $f(\lambda)=0$
ونفرض ان $f'(\lambda)\neq 0$ وان ϵ_n الخطأ في القيمة التقريبية x_n

$$\epsilon_n = x_n - \lambda \quad \text{——} ①$$

$$\epsilon_{n+1} = x_{n+1} - \lambda \quad \text{——} ②$$

المطلوب معرفة مدى سرعة اتجاه الخطأ ϵ_n نحو الصفر، اي مدى سرعة تناقص هذا الخطأ مع زيادة عدد التكرارات n.

نظرية: في طريقة (N-R)

$$\epsilon_{n+1} \cong \frac{f''(\lambda)}{2f'(\lambda)} \cdot \epsilon_n^2$$

حيث λ القيمة المضبوطة للجذر، ϵ_n الخطأ في القيمة التقريبية.

proof: From ① & ② , we have

$$x_n = \lambda + \epsilon_n$$

$$x_{n+1} = \lambda + \epsilon_{n+1}$$

From $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, we get.

$$\lambda + \epsilon_{n+1} = \lambda + \epsilon_n - \frac{f(\lambda+\epsilon_n)}{f'(\lambda+\epsilon_n)}$$

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n - \frac{f(\lambda+\epsilon_n)}{f'(\lambda+\epsilon_n)} \quad \text{——} ⑧$$

From Tayler series about $x=\lambda$, we have

$$f(\lambda+\epsilon_n) = f(\lambda) + \epsilon_n f'(\lambda) + \frac{\epsilon_n^2}{2!} f''(\lambda) + \cdots$$

$$f'(\lambda+\epsilon_n) = f'(\lambda) + \epsilon_n f''(\lambda) + \frac{\epsilon_n^2}{2!} f'''(\lambda) + \cdots$$

$$f(\lambda) = 0$$

$$f(\lambda+\epsilon_n) = \epsilon_n f'(\lambda) + \frac{\epsilon_n^2}{2!} f''(\lambda) + \cdots$$

$$= \epsilon_n f'(\lambda)\left[1 + \frac{\epsilon_n}{2!}\frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)} + \cdots\right]$$

$$f'(\lambda+\epsilon_n) = f'(\lambda)\left[1 + \epsilon_n \frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)} + \cdots\right]$$

$$\frac{f(\lambda+\epsilon_n)}{f'(\lambda+\epsilon_n)} = \epsilon_n\left[1 + \frac{\epsilon_n}{2!}\frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)} + \cdots\right]\left[1 + \epsilon_n \frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)} + \cdots\right]^{-1}$$

$$= \epsilon_n\left[1 + \frac{\epsilon_n}{2!}\frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)} + \cdots\right]\left[1 - \epsilon_n \frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)} + \cdots\right]$$

$$= \epsilon_n\left[1 - \frac{\epsilon_n}{2}\frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)} + \cdots\right]$$

From ⊛

$$\epsilon_{n+1} = \epsilon_n - \epsilon_n\left[1 - \frac{\epsilon_n}{2}\frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)} + \cdots\right]$$

$$= \frac{\epsilon_n^2}{2}\frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)} + \cdots$$

$$\epsilon_{n+1} \cong \frac{\epsilon_n^2}{2!}\frac{f''(\lambda)}{f'(\lambda)}.$$

وهي العلاقة المطلوبة التي توضح مدى تقارب الطريقة، ويقال ان التقارب هو تقارب تربيعي quadratic convergence وهو يعني ان عدد الأرقام العشرية الصحيحة يتضاعف تقريبا مع كل تكرار، اي ان اذا كان الحل دقيق بمرتبة كبيرة في خطوة معينة فيكون دقيق بمرتبتين في الخطوة التالية وبأربع مراتب في الخطوة التي تليها وهكذا.