التحليل العددي: علم يتعلق باشتقاق ووصف وتحليل طرق الحصول على الحلول العددية التي عادتاً يصعب ايجادها (مثل) بالطرق الرياضية التحليلية المعروفة.
هناك الكثير من المسائل الرياضية التي تواجهنا لا يمكن ايجاد الحلول المضبوطة بالطرق الرياضية المعروفة والتقنيات الرياضية المعتادة، كما نواجه مثلاً عند حل بعض المعادلات الجبرية او التكاملات المحدودة او المعادلات التفاضلية الاعتيادية او الجزئية ... الخ. ففي مثل هذه الحالات نبحث عن طرق محددة الخطوات (خوارزمية) للوصول من البيانات المعطاة الى نتائج او حلول عددية تعد تقريبا للحلول المضبوطة اي نتائج تقريبية للحل المضبوط.
من المعروف ان هناك اكثر من طريقة «خوارزمية» للوصول الى الحل التقريبي ولفرض المفاضلة بينهما للوصول الى افضل خوارزمية هناك عاملان مهمان هما السرعة والدقة، فالسرعة تختص بزمن الحاسوب الى الحل المطلوب وكلما كان هذا الزمن اقل كانت الطريقة افضل، اما الدقة فهي الفارق بين الحل العددي الذي توصلنا اليه باحد الخوارزميات والحل المضبوط وهذا الفارق يطلق عليه بالخطأ، وكلما كان الفارق صغير كانت الطريقة ادق وافضل.
الامثلة التالية توضح متى يمكن ان نبحث عن حل عددي (تقريبي)

1- $x^9 + 3x^5 - 2x + 7 = 0$ (معادلة جبرية)

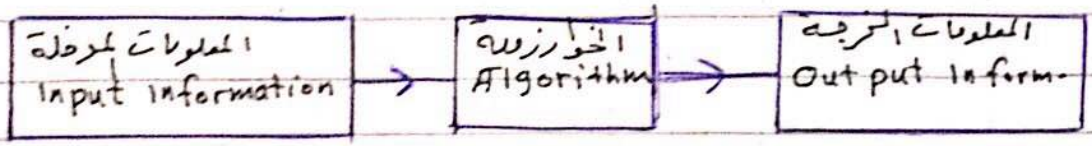
2- $x^3 \sin x + \ln x = \cos x + 1$ (معادلة متسامية)

3- $\int_1^3 \frac{\cos x}{x} dx$

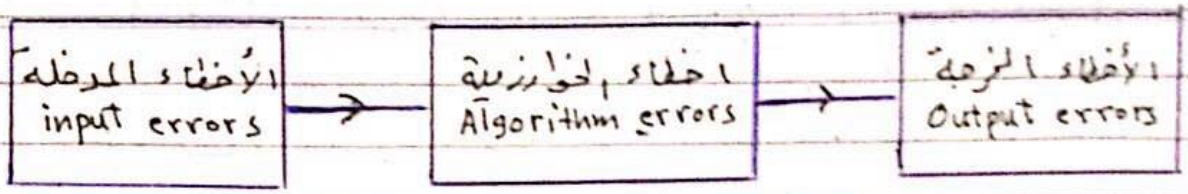
او عند حل بعض المعادلات التفاضلية الاعتيادية او الجزئية بالشروط الابتدائية المحددة

في حل هذه المسائل نبحث عن خوارزميات وهي طرق محدودة الخطوات للوصول من البيانات المعطاة الى النتائج او حلول لعددية تقدّ تقريبا للحل المضبوط.
الحل العددي لمسألة ما قد يكون عدداً واحداً «رقم واحد» كمية تكامل محدود او حل معادلة متعددة او اكثر (كمدة اعداد تمثل جذور تقريبية لمعادلة جبرية»

ان التحليل العددي يتلخص في اشتقاق وتقييم طرق لحساب نتائج عددية معلومة من بيانات عددية معطاة، وهذا يجعل التحليل العددي جزءاً من العلم الحديث الذي يسمى «تشغيل المعلومات» حيث البيانات المعطاة تمثل المعلومات الداخلة والنتائج المطلوبة تمثل المعلومات المخرجة كما واضح من المخطط التالي:



في حالة وجود اكثر من خوارزمية نلجأ الى عاملي التفاضل بينهما وهما الدقة والسرعة فالطريقة التي تؤدي الى نتائج ادق اي اخطأ اقل ما يمكن نفضل على غيرها وكذلك الطريقة التي تؤدي نتائج بسرعة اكبر اي نتقارب الى الحل المطلوب في زمن اقل نفضل على غيرها. وعموما توجد درجة اخطاء تؤدي الى خطأ في النتيجة التي نحصل عليها بعد اي خوارزمية.
من المعروف ان المعلومات المدخلة نادراً ما تكون مضبوطة لانها عادة تأتي من اجهزة قياس من نوع او اخر مختلف وكذا بصاحب الخوارزمية اخطاء مختلفة ولذلك فالمعلومات المخرجة تشمل على اخطاء من هذين المصدرين وكما موضح في الرسم المخطط التالي



ونظراً لأهمية الخطأ في مسايراتنا التي تدخل في كل الخوارزميات لذا علينا دراسة الخطأ ومصادره وكيفية معالجته قدر الإمكان لتقليل الخطأ لأقل ما يمكن.

1- انواع الأخطاء: Types of Errors

بالرغم من ان الطرائق العددية تعطي حلول وحيدة لكل عملية تكرارية إلا ان هنالك ما نسميه بالأخطاء التي تصاحب كل عملية (خوارزمية) وهي:

1- الخطأ المطلق: absdute error

نفرض ان x^* قيمة تقريبية للقيمة المضبوطة x نعرف الخطأ المطلق بانه $e_x = \pm(x - x^*)$

2- الخطأ النسبي: relative error

ويعرف بانه حاصل قسمة الخطأ المطلق على القيمة المضبوطة اي

$$e_r = \left|\frac{e_x}{x}\right| = \left|1 - \frac{x^*}{x}\right|$$

2- مصادر الأخطاء: Sources of errors

ان الخطأ الحاصل في الحل التقريبي لمسألة ما يكون عادة بسبب تراكم عدة اخطاء هذه الأخطاء يمكن ان تصنف الى الأتي:

1- اخطاء الصياغة: Formulation Errors

في معظم التطبيقات الرياضية (فيزياء او اقتصاد ... الخ) نحاول ان نجعل من النموذج الرياضي نموذجاً مثالياً وصقلاً لوصف المشكلة الأساسية

على سبيل المثال نفرض ان لدينا الساعة الاقتصادية والتي
ان سنية والثانية هي سنة ثابتة خلال فترة معينة من الزمن
t بالرغم من ان الحقيقة هي غير ذلك. كذلك عند دراسة بعض
ظواهر مثل البترول نفرض ان مخزون الحقل هو غير معلوم اي يساوي
صفر وانا الكثير من المسائل الاخرى التي تكون الفرضيات مبنية لغرض
تبسيط وسهولة حل المسألة ولكن هذه الفرضيات الاخرى هذا النوع
من الخطأ يسمى بالخطأ الصياغي واحيانا يسمى بخطأ النظرية.

ب - اخطاء التدوير: Rounding Errors
يعتبر هذا الخطأ من اهم مصادر الأخطاء، كونه (الارقام الحقيقية)
تستعمل بدلا من الارقام المضبوطة فعلى سبيل المثال فعندما
نقول بان نفوس العالم العراقية بغداد سنة 1977 هو
3 مليون نسمة لرقم مميز واحد فقط. لتقريب لعدد السكان
الحقيقي 3,120,030 نسمة. وبصورة مشابهة يمكن تقريب العددان
0.0045721 و 6020 الى 0.00457 و 6020 و 6022 على التوالي.
ان الخطأ الناتج من تدوير العدد الى عدد معين من الارقام
المميزة يسمى بخطأ التدوير.

ج/ اخطاء القطع: Chopping Errors
ان آلية الحاسبة الالكترونية لا تدور العدد بل في العادة
تقطعه - وعليه تحول العدد مثلا من 3,120,030 الى 3 مليون
نسمة اي تأخذ العدد المميز وعليه فان الخطأ الناتج والذي يمثل
خطأ القطع وتكون قيمته في معظم الحالات اكبر من خطأ التدوير

د/ الأخطاء الاصلية: Inherent Errors
في كثير من المسائل العلمية يتم الحصول على بيانات اما بالملاحظة
او بالقياس من اجهزة مختلفة ونظرا لدقة هاتين الطريقتين
المذكورة

على سبيل المثال نفرض ان لدينا الساعة الاقتصادية والتي
ان سنية والثانية هي سنة ثابتة خلال فترة معينة من الزمن
t بالرغم من ان الحقيقة هي غير ذلك. كذلك عند دراسة بعض
ظواهر مثل البترول نفرض ان مخزون الحقل هو غير معلوم اي يساوي
صفر وانا الكثير من المسائل الاخرى التي تكون الفرضيات مبنية لغرض
تبسيط وسهولة حل المسألة ولكن هذه الفرضيات الاخرى هذا النوع
من الخطأ يسمى بالخطأ الصياغي واحيانا يسمى بخطأ النظرية.

ب - اخطاء التدوير: Rounding Errors
يعتبر هذا الخطأ من اهم مصادر الأخطاء، كونه (الارقام الحقيقية)
تستعمل بدلا من الارقام المضبوطة فعلى سبيل المثال فعندما
نقول بان نفوس العالم العراقية بغداد سنة 1977 هو
3 مليون نسمة لرقم مميز واحد فقط. لتقريب لعدد السكان
الحقيقي 3,120,030 نسمة. وبصورة مشابهة يمكن تقريب العددان
0.0045721 و 6020 الى 0.00457 و 6020 و 6022 على التوالي.
ان الخطأ الناتج من تدوير العدد الى عدد معين من الارقام
المميزة يسمى بخطأ التدوير.

ج/ اخطاء القطع: Chopping Errors
ان آلية الحاسبة الالكترونية لا تدور العدد بل في العادة
تقطعه - وعليه تحول العدد مثلا من 3,120,030 الى 3 مليون
نسمة اي تأخذ العدد المميز وعليه فان الخطأ الناتج والذي يمثل
خطأ القطع وتكون قيمته في معظم الحالات اكبر من خطأ التدوير

د/ الأخطاء الاصلية: Inherent Errors
في كثير من المسائل العلمية يتم الحصول على بيانات اما بالملاحظة
او بالقياس من اجهزة مختلفة ونظرا لدقة هاتين الطريقتين
المذكورة

- نأن الخطأ سيتولد ، هذه الأخطاء في البيانات الأساسية تسمى بأنها أخطاء الصلبة. كذلك نان الأعداد الغير النسبية مثل ($e, \sqrt{2}, \pi, \ldots$) لاتمثل بشكل مضبوط بل تقريبي هذه الأخطاء تسمى الأخطاء الصلبة ايضا.

و/ الخطأ المتراكم : Accumulated Errors

عند ايجاد الحلول العددية للمعادلات التفاضلية الاعتيادية او الجزئية تتضمن تكرارا لمجموعة من العمليات الحسابية والخطوات متتالية ، فالخطأ في كل خطوة او تكرار يزداد وذلك لاعتماد الحسابات على القيم التقريبية المحسوبة في الخطوات السابقة مما يتسبب خطأ في النتيجة وهذا يسمى بالخطأ المتراكم..

و/ اخطاء البتر : Truncation Errors

وهو خطأ ناتج من قطع طريقة محددة قبل ان تنتهي طبيعيا وشكل نهائي. هذا يحدث عندما تكتب الدالة f بشكل متسلسلة لانهائية وتقطع بعد عدد محدد من الحدود ، هذا التوقف عن n من الحدود يسبب خطأ في قيمة f(x) ، يطلق عليه خطأ البتر وذلك لانه تم بتر السلسلة اللانهائية في n من الحدود المتبقية وكمثال على ذلك الدالة المثلثية

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

فاذا ما حسبنا قيمة $f(x_0)$ عند الحدود الثلاث الأولى فاننا نقدر الخطأ ليساوي

$$T = -\frac{x_0^6}{6!} + \frac{x_0^8}{8!} - \frac{x_0^{10}}{10!} + \cdots$$

تعاريف مهمة :

(التدوير)

١- التقريب : Rounding

يُقرب عدد ما الى عدد (n) من الأرقام المعنوية. بجعل جميع الأرقام يمين الموضع رقم n صفرا ، اما الرقم في الموضع رقم n فانه اما ان يترك كما هو دون تغيير او يزداد وحده واحده حسب ما اذا كان الجزء المقتطع اقل او اكبر من نصف وحده في الموضع رقم n . اما اذا كان الجزء المقتطع مساويا بالضبط لنصف وحدة فان الرقم في الموضع n اما يزداد وحده واحده او ان يترك دون تغيير.

بالنسبة للتقريب لعدد n من الأرقام العشرية decimals : فان الأرقام بعد الموضع رقم (n) والتي تجعل كلها اصفار تحذف.

مثال(١) : قرب الاعداد التالية

أ- 5234578 لأربعة ارقام معنوية

ب- 854322 لثلاثة ارقام معنوية

ج- 3.1415938 لخمسة ارقام عشرية

د- 3.275 لرقمين عشريين

الحل :

أ- 5234000

ب- 854000

ج- 3.14159

د- اما 3.28 او 3.27

٢- العدد صحيح لـ n رقم عشري : نفرض ان x^* قيمة تقريبية وان x القيمة المضبوطة وان e_x الخطأ المطلق ، يقال ان العدد x^* صحيح لـ n رقم عشري او (فيه n رقم عشري صحيح) اذا كان

$$|e_x| \leq 0.5 \times 10^{-n}$$

فالرقم المضبوط $x = 2.4671$ والرقم التقريبي $\overset{*}{x} = 2.4631$

فإن

$$|e_x| = |2.4671 - 2.4631| = 0.004$$

أي أن

$$|e_x| = 0.004 = 0.4 \times 10^{-2}$$
$$< 0.5 \times 10^{-2}$$

أي أن الرقم x صحيح لرقمين عشريين.

أما الرقم $\overset{*}{x} = 2.4620$ فإن

$$|e_x| = |2.4620 - 2.4671| = 0.0051$$
$$0.0051 = 0.51 \times 10^{-2} = 0.051 \times 10^{-1}$$

أي أن $\overset{*}{x}$ صحيح لرقم عشري واحد.

3- الرقم المعنوي: Significant digits

نفرض أن x لعدد صحيح لـ n رقم عشري. أرقام العدد x التي تحتل المواضع حيث الوحدة أكبر من 10^{-n} تسمى أرقاما معنوية علما بأن الأصفار الابتدائية لا تُعد.

أو بصياغة أخرى:

الرقم المعنوي للعدد التقريبي هو أي رقم لا يساوي الصفر في حالته العشرية أو أي صفر يقع بين رقمين معنويين أو تستخدم لتحديد المكان. كل الأصفار التي تستخدم لتثبيت الموقع العشري للعدد التقريبي لا تعتبر أرقاما معنوية.

مثال (2): العدد $0.00\underset{\text{أرقام معنوية}}{3050}$

لتثبيت موقع الفاصلة العشرية فقط 4 أرقام معنوية ولكن الرقم $0.00\underset{\text{أرقام معنوية}}{305}$ يتكون من (3) أرقام معنوية

فالرقم المضبوط $x = 2.4671$ والرقم التقريبي $\overset{*}{x} = 2.4631$

فإن

$$|e_x| = |2.4671 - 2.4631| = 0.004$$

أي أن

$$|e_x| = 0.004 = 0.4 \times 10^{-2}$$
$$< 0.5 \times 10^{-2}$$

أي أن الرقم x صحيح لرقمين عشريين.

أما الرقم $\overset{*}{x} = 2.4620$ فإن

$$|e_x| = |2.4620 - 2.4671| = 0.0051$$
$$0.0051 = 0.51 \times 10^{-2} = 0.051 \times 10^{-1}$$

أي أن $\overset{*}{x}$ صحيح لرقم عشري واحد.

3- الرقم المعنوي: Significant digits

نفرض أن x لعدد صحيح لـ n رقم عشري. أرقام العدد x التي تحتل المواضع حيث الوحدة أكبر من 10^{-n} تسمى أرقاما معنوية علما بأن الأصفار الابتدائية لا تُعد.

أو بصياغة أخرى:

الرقم المعنوي للعدد التقريبي هو أي رقم لا يساوي الصفر في حالته العشرية أو أي صفر يقع بين رقمين معنويين أو تستخدم لتحديد المكان. كل الأصفار التي تستخدم لتثبيت الموقع العشري للعدد التقريبي لا تعتبر أرقاما معنوية.

مثال (2): العدد $0.00\underset{\text{أرقام معنوية}}{3050}$

لتثبيت موقع الفاصلة العشرية فقط 4 أرقام معنوية ولكن الرقم $0.00\underset{\text{أرقام معنوية}}{305}$ يتكون من (3) أرقام معنوية

وعليه فان الخوارزمية التي تكون من الأقواس ذات خطية تكون مستقرة ومقبولة عكس ما كان الخوارزمية الأسي الذي يكون غير مستقره وغير مقبولة